Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau moyen
Épreuve 1

Mardi 3 novembre 2020 (après-midi)

Numéro de session du candidat

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques NM** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[90 points]**.

15 pages

8820 – 7307

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

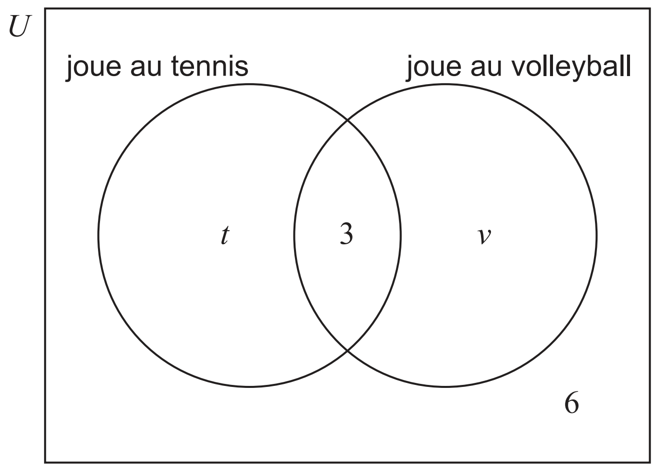
Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Dans une classe de 30 élèves, 19 jouent au tennis, 3 jouent au tennis et au volleyball, et 6 ne pratiquent aucun des deux sports.

Le diagramme de Venn suivant montre les événements « joue au tennis » et « joue au volleyball ». Les valeurs t et v représentent des nombres d'élèves.



(a) (i) Trouvez la valeur de t.

(ii) Trouvez la valeur de v. [4]

(b) Trouvez la probabilité qu'un élève choisi au hasard dans cette classe joue au tennis ou au volleyball, mais pas aux deux sports. [2]

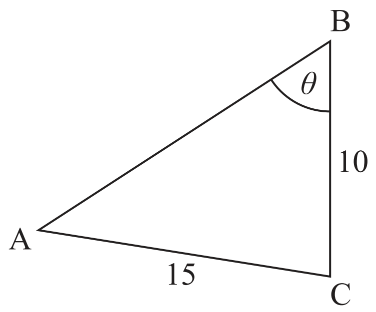
(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

2. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un triangle ABC.

la figure n'est pas à l'échelle



$\mathrm{AC} = 15\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{BC} = 10\,\mathrm{cm}$ et $\mathrm{A\hat{B}C} = \theta$.

Soit $\sin \mathrm{C\hat{A}B} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(a) Étant donné que $\mathrm{A\hat{B}C}$ est aigu, trouvez $\sin\theta$. [3]

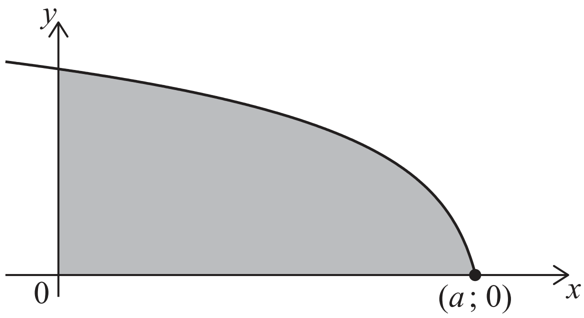
(b) Trouvez $\cos(2 \times \mathrm{C\hat{A}B})$. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. [Note maximale : 7]

Soit $f(x) = \sqrt{12 - 2x}$, $x \leq a$. Le diagramme suivant montre une partie de la représentation graphique de f.

La région grisée est délimitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



La représentation graphique de f coupe l'axe des abscisses au point $(a\,;\,0)$.

(a) Trouvez la valeur de a. [2]

(b) Trouvez le volume du solide obtenu lorsque la région grisée subit une rotation de 360° autour de l'axe des abscisses. [5]

4. [Note maximale : 6]

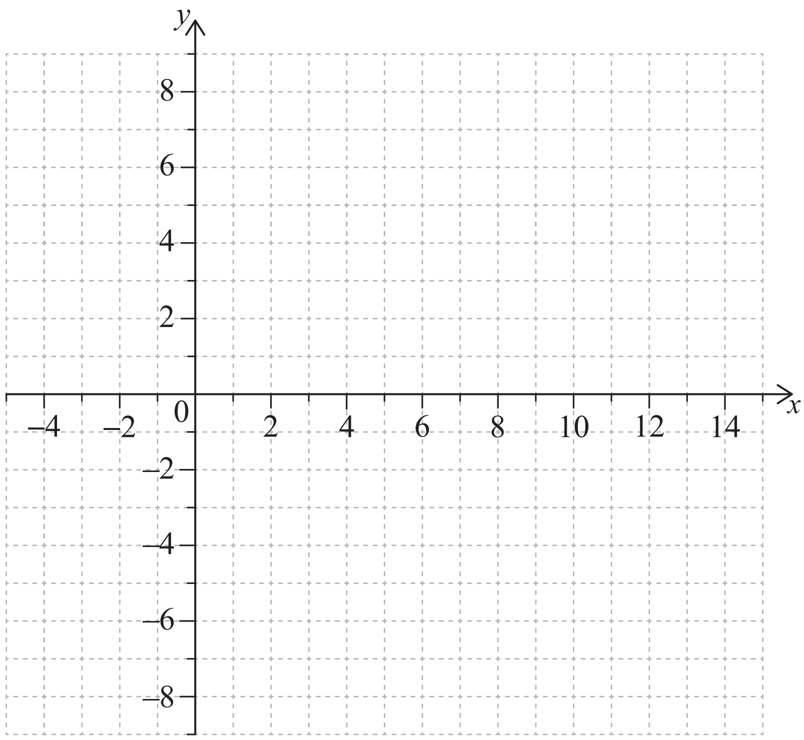
Soit $f(x) = a\log_3(x-4)$, pour $x > 4$, où $a > 0$.

Le point $A(13\,;\,7)$ se trouve sur la représentation graphique de f.

(a) Trouvez la valeur de a. [3]

L'abscisse à l'origine de la représentation graphique de f est $(5\,;\,0)$.

(b) Sur le repère suivant, esquissez la représentation graphique de f. [3]



(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

5. [Note maximale : 6]

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ et $g(x) = -f(x) + k$.

Trouvez les valeurs de k de sorte que $g(x) = 0$ n'admet aucune racine réelle.

6. [Note maximale : 7]

La représentation graphique d'une fonction f passe par le point $(\ln 4\,;\,20)$.

Étant donné que $f'(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$, trouvez $f(x)$.

7. [Note maximale : 7]

Dans cette question, toutes les longueurs sont en mètres et le temps est en secondes.

Considérez deux particules, P_1 et P_2, qui commencent à bouger au même moment.

La particule P_1 se déplace en ligne droite de sorte que son déplacement à partir d'un point fixe est donné par $s(t) = 10 - \frac{7}{4}t^2$, pour $t \geq 0$.

(a) Trouvez une expression pour le vecteur vitesse de P_1 au temps t. [2]

La particule P_2 se déplace également en ligne droite. La position de P_2 est donnée par

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

La vitesse de P_1 est supérieure à la vitesse de P_2 lorsque $t > q$.

(b) Trouvez la valeur de q. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

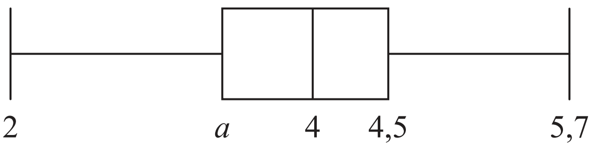
8. [Note maximale : 15]

Chaque athlète faisant partie d'une équipe de course à pied a enregistré la distance (M milles) qu'il a courue en 30 minutes.

La distance médiane est de 4 milles et l'écart interquartile est de $1{,}1$ mille.

Ces informations sont montrées dans le diagramme en boîte à moustaches suivant.

Milles courus en 30 minutes



(a) Trouvez la valeur de a. [2]

La distance en milles, M, peut être convertie en une distance en kilomètres, K, en utilisant la formule $K = \frac{8}{5}M$.

(b) Écrivez la valeur de la distance médiane en kilomètres (km). [1]

La variance des distances courues par les athlètes est de $\frac{16}{9}\,\mathrm{km}^2$.

L'écart type des distances est b milles.

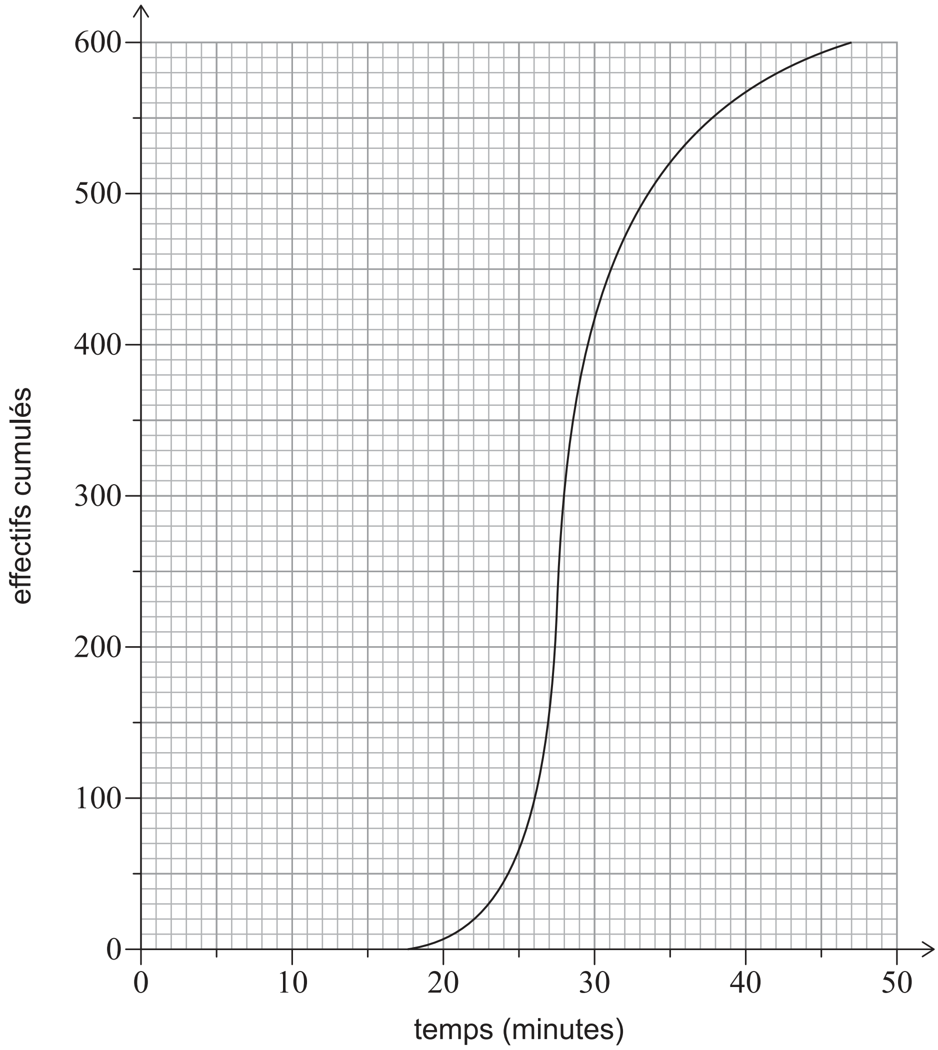
(c) Trouvez la valeur de b. [4]

(Suite de la question à la page suivante)

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 8)

Un total de 600 athlètes faisant partie de différentes équipes prennent part à une course de $5\,\text{km}$. Les temps que les 600 athlètes ont pris pour finir la course de $5\,\text{km}$ sont montrés dans la courbe des effectifs cumulés suivante.



Il y a eu 400 athlètes qui ont pris entre 22 et m minutes pour finir la course de $5\,\text{km}$.

(d) Trouvez m. [3]

Les 150 premiers athlètes ayant fini la course ont remporté un prix.

(e) Étant donné qu’un athlète a pris entre 22 et m minutes pour finir la course de $5\,\text{km}$, calculez la probabilité qu’il ait remporté un prix. [5]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

9. [Note maximale : 15]

Les coordonnées des points A et B sont respectivement $(1\,;1\,;2)$ et $(9\,;m\,;-6)$.

(a) Exprimez $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en fonction de m. [2]

L'équation de la droite L, qui passe par B, est $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-3\\-19\\24\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$.

(b) Trouvez la valeur de m. [5]

Considérez un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$, tel que $\boldsymbol{u}=p\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$, où $p>0$.

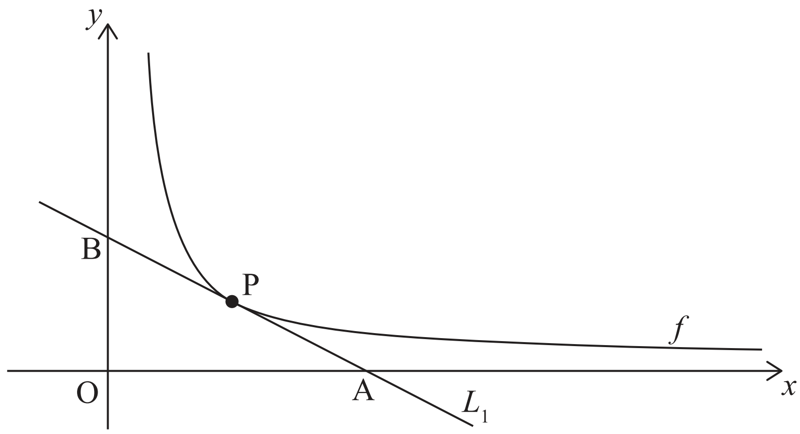
Le point C est tel que $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=9\boldsymbol{u}$.

(c) Trouvez les coordonnées de C. [8]

10. [Note maximale : 15]

Le diagramme suivant montre une partie de la représentation graphique de $f(x)=\frac{k}{x}$, pour $x>0$, $k>0$.

Soit $\mathrm{P}\left(p,\ \frac{k}{p}\right)$ un point quelconque sur la représentation graphique de f. La droite L_1 est la tangente à la représentation graphique de f en P.



(a) (i) Trouvez $f'(p)$ en fonction de k et p.

(ii) Montrez que l'équation de L_1 est $kx+p^2y-2pk=0$. [4]

La droite L_1 coupe l'axe des abscisses au point $\mathrm{A}(2p\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point B.

(b) Trouvez l'aire du triangle AOB en fonction de k. [5]

(Suite de la question à la page suivante)

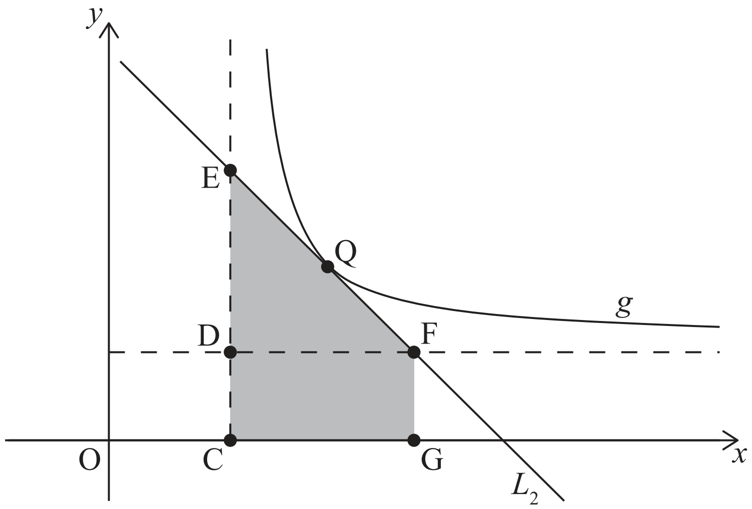
N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 10)

La représentation graphique de f subit une translation de $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour donner la représentation graphique de g.

Dans le diagramme suivant :
- le point Q se situe sur la représentation graphique de g ;
- les points C, D et E se situent sur l’asymptote verticale de g ;
- les points D et F se situent sur l’asymptote horizontale de g ;
- le point G se situe sur l’axe des abscisses tel que FG est parallèle à DC.

La droite L_2 est la tangente à la représentation graphique de g en Q, et passe par E et F.



(c) Étant donné que le triangle EDF et le rectangle CDFG ont des aires égales, trouvez la pente de L_2 en fonction de p. [6]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.